فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

مدرس:

❋ تبدیل

تبدیل T در صفحه، تابعی است که به هر نقطه‌ی A از صفحه، دقیقاً یک نقطه‌ی دیگر مانند A' را نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطه‌ی A' از صفحه، تصویر دقیقاً یک نقطه‌ی A از صفحه است. $\begin{cases} T: R^2 \to R^2 \\ T(A) = A' \end{cases}$

☑ **مثال ۱: اگر $T(x,y)=(x+1,3y)$ یک تبدیل باشد، آنگاه:**

الف) تصویر نقاط (۰,۰) و (۲,۵) و (۲-,۱-) را تحت این تبدیل بیابید.

ب) تحت تبدیل T، (۴,۹) تصویر چه نقطه‌ای است؟

یادآوری: طول پاره‌خط AB و شیب آن از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شدند:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$$

☑ **مثال ۲: نقاط A(۱,۴) و B(۲-,۱-) و تبدیل $T(x,y)=(-x,y)$ مفروض‌اند،**

الف) مختصات A' و B'، تصویر A و B را تحت تبدیل T بیابید و در دستگاه مختصات رسم کنید.

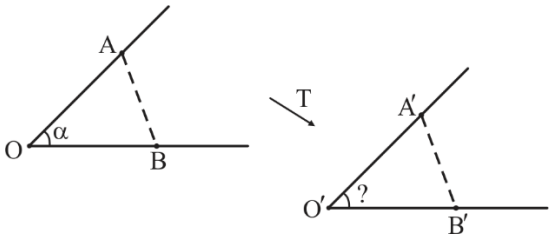
ب) طول AB و $A'B'$ را بیابید.

پ) شیب AB و $A'B'$ را بیابید.

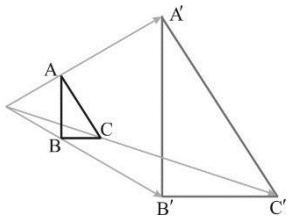
تبدیل ایزومتری: تبدیلی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند، ***تبدیل ایزومتری*** یا ***طولپا*** نامیده می‌شود.

نکته: هر تبدیل طولپا، اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.

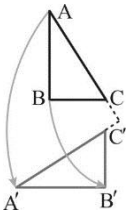
اثبات:



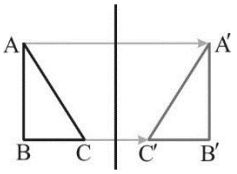
* انواع تبدیل‌های هندسی



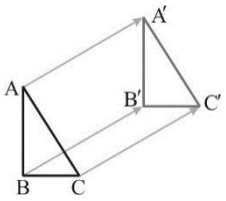
تجانس



دوران



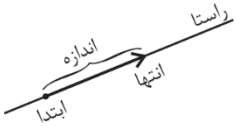
بازتاب



انتقال

() انتقال (Translation)

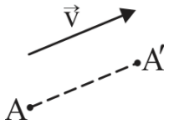
یادآوری:



۱- در شکل مقابل، یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲- دو بردار که هم‌اندازه، هم‌راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر نامیده می‌شوند.

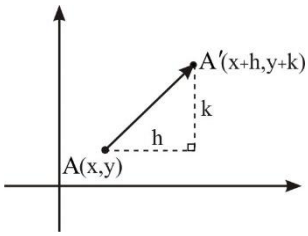
تعریف: انتقال تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه‌ی A از صفحه، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$.



نکته: انتقال، طولپاست و شیب خط را حفظ می‌کند.

اثبات:

نکته: **ضابطه‌ی نگاشت انتقال:**



$$T(x,y)=(x+h,y+k)$$

که در آن $\vec{v}=(h,k)$ است.

☑ **تست ۳:** کدام تبدیل زیر انتقال نیست؟

۱) $T(x,y)=(x,y)$ ۲) $T(x,y)=(x-\frac{۱}{۲},y+\frac{۱}{۲})$

۳) $T(x,y)=(۲x,y)$ ۴) $T(x,y)=(x,y+۱)$

تذکر: به تبدیل $T(x,y)=(x,y)$، **تبدیل همانی** گفته می‌شود که نوعی انتقال است. تبدیل همانی، هر نقطه را بر روی خودش تصویر می‌کند.

☑ **تست ۴:** انتقال یافته‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$، نقطه‌ی $A'(۵,-۱)$ است. بردار انتقال کدام است؟

۱) $\vec{V}(۴,۳)$ ۲) $\vec{V}(۴,-۳)$

۳) $\vec{V}(-۴,۳)$ ۴) $\vec{V}(-۴,-۳)$

☑ **تست ۵:** مثلث قائم الزاویه به طول وتر ۱۰ مفروض است. این مثلث را با بردار $\overrightarrow{AV}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) است انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و مثلث جدید $\frac{۱}{۲۵}$ مساحت مثلث اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AV}$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

نکته: اگر A' انتقال یافته‌ی A باشد، بردار انتقال برابر است با: $\vec{V}=\overrightarrow{AA'}=A'-A=(x_{A'}-x_A,y_{A'}-y_A)$

چند نکته:

۱- انتقال یافته‌ی هر پاره‌خط، با آن پاره‌خط موازی و برابر است.

۲- انتقال یافته‌ی هر زاویه، با آن زاویه برابر است و اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر موازی‌اند.

۳- دو خط موازی d و d' همواره انتقال یافته‌ی یکدیگرند. برای این انتقال، بی‌شمار بردار می‌توان یافت. بردارهایی که ابتدای آن روی d و انتهای آن روی d' قرار دارد.

۴- دو خط متقاطع هیچگاه انتقال یافته‌ی یکدیگر نیستند.

۵- ترکیب چند انتقال، یک انتقال است، به‌طوری‌که بردار انتقال حاصل، جمع بردارهای آن چند انتقال است.

☑ **مثال ۶:** در نمودار زیر، کدام یک از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافته‌ی شکل سایه دار است؟